Calcul integral

Durée conseillée : 2 heures

Je vous rappelle qu'une réponse mal rédigée est une réponse incorrecte.
Si vous rencontrez ce qu'il vous semble etre une erreur signalez le à
BOUGHAZI Ali

Ce sujet comporte **3 parties** indépendantes, la premiere sera consacré au calcul de l'intégrale de Gauss ainsi qu'à une de ses applications. La seconde et la derniere sont consacrées respectivement au calcul de l'intégrale de Dirichlet et de celle de Fresnel.

Partie 1 - L'intégrale de Gauss :

On pose pour x réel positif et n un entier naturel non nul, on pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} (1 - \frac{x^2}{n})^n & \text{si } 0 \leq x \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On notera f la limite simple de la suite de fonction (f_n).

- **a.** Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{x^2}{n})^n dx$$

. En déduire la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

.

On pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$$

- **b.** Trouver une relation de réccurence vérifié par la suite (I_n).
- **c.** En déduire la valeur de I_n pour tout entier n.

Partie II - L'intégrale de Dirichlet :

- **a.** Montrer l'existence de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

de deux manières différentes.

- **b.** Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \int_0^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)t)}{sin(t)} dt = \frac{\pi}{2}$$

- **c.** Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$$

d. Trouvez alors la valeur de I.

Partie III - Intégrale de Fresnel :

a. Etudier la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}du$$

On pose :

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$$

$$J = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt$$

$$K = \int_0^{+\infty} e^{it^2}dt$$

b. Justifier l'existence de I, J et K.

c. Justifier que

$$x \to \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(t^2+i)}}{t^2+i}dt$$

existe et est continue. Etudier sa dérivabilité et la dériver.

d.

Proposer une intégrale égale à $\overline{K}$.

e.

Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+i}$$

En déduire les valeurs de I, J et K.